Números complejos

En el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales no tiene solución la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Para resolver este problema se hace necesaria una nueva ampliación del concepto de número introduciendo un nuevo elemento, i, que verifique dicha ecuación, y construyendo un nuevo cuerpo que contenga a $\mathbb{R}$ y a este elemento.

5.1. Definición. Cuerpo de los números complejos

En el conjunto $\mathbb{R}^2$ de los pares ordenados de números reales se pueden definir las operaciones suma y producto de la forma:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

que lo dotan de una estructura de cuerpo. Este cuerpo se denomina cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Además, el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales es isomorfo al subcuerpo de los números complejos de la forma $(a, 0)$.

El número $(0,1)$ verifica $(0,1)(0,1) = (-1,0)$ por lo que este número, denotado por i y denominado unidad imaginaria, verifica que $i^2 = -1$.

La expresión más intuitiva de un número complejo es su forma binómica, que definimos a continuación.

5.2. Definición. Forma binómica de un número complejo

Se llama forma binómica del número complejo $z = (x, y)$ a la expresión $z = x + yi$ donde i es la unidad imaginaria, x se denomina parte real de z e y parte imaginaria de z denotándose

$$x = \operatorname{Re} z \qquad y = \operatorname{Im} z$$

COMENTARIOS:

i) *El número complejo $x + yi$ se puede representar en el plano $\mathbb{R}^2$ como el punto de coordenadas cartesianas (x, y).*

ii) *El cuerpo $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, es decir toda ecuación polinómica con coeficientes complejos tiene solución en $\mathbb{C}$.*

iii) *$\mathbb{C}$ no admite un orden total compatible con la estructura de cuerpo.*

5.3. Operaciones elementales con números complejos

Dados los números complejos en forma binómica $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$ se tiene

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$$

(es el producto de los binomios teniendo en cuenta que $i^2 = -1$)

Y si $z_2 \neq 0$ entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)}{(x_2 + y_2 i)} \frac{(x_2 - y_2 i)}{(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$$

En particular, el inverso del número $z = x + yi \neq 0$ es

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i$$

5.4. Potencias de la unidad imaginaria

Observemos que dado que $i^2 = -1$ las primeras potencias de la unidad imaginaria son

$$\begin{array}{llll} i^1 = i & i^2 = -1 & i^3 = -i & i^4 = 1 \\ i^5 = i & i^6 = -1 & i^7 = -i & \text{etc.} \end{array}$$

Para calcular i^n con $n \in \mathbb{Z}$ basta elevar i al resto de la división de n entre 4.

5.5. Definición. Complejo conjugado

Se llama conjugado del número complejo $z = x+yi$ al número $\overline{z} = x - yi$.

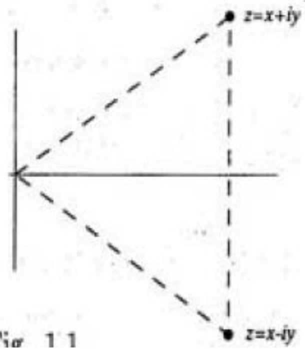

Fig. 1.1

5.6. Propiedades del conjugado

a) Para todo $z \in \mathbb{C}$ se verifica $\overline{\overline{z}} = z$.

b) Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ entonces $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ y $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Y si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

c) Para todo $z \in \mathbb{C}$ se verifica $\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$ e $\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2}$ de donde se deduce que un número complejo $z \in \mathbb{R}$ si y sólo si $z = \overline{z}$.

5.7. Definición. Módulo y argumento de un número complejo

Dado el número complejo $z = x + yi$ se define el módulo de z de la forma

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y el argumento de z es un ángulo θ, denotado $\arg z$, que verifica

$$x = |z| \cos \theta \,, \qquad y = |z| \operatorname{sen} \theta$$

Observemos que dado que las funciones trigonométricas son periódicas hay infinitos argumentos de un número complejo. Llamaremos argumento principal de $z \neq 0$, y lo denotaremos $\operatorname{Arg} z$, al único argumento $\theta \in [0, 2\pi)$.

NOTA: *Se puede calcular el argumento de $z = x + yi$ con $x \neq 0$ teniendo en cuenta que $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$ y los signos de x e y.*

5.8. Propiedades del módulo y argumento

a) $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

b) $|z| = 0 \iff z = 0$.

c) $|z|^2 = z\overline{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

d) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

e) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

f) Si θ_1 es un argumento de z_1 y θ_2 es un argumento de z_2 entonces $\theta_1 + \theta_2$ es un argumento de $z_1 \cdot z_2$ y $\theta_1 - \theta_2$ es un argumento de $\frac{z_1}{z_2}$ cuando $z_2 \neq 0$.

5.9. Forma módulo-argumental de un número complejo

La expresión en forma módulo-argumental de un número complejo z es el par (ρ, θ) donde $\rho = |z|$ y θ es un argumento de z.

NOTAS:

1) *La expresión binómica de un número complejo equivale a utilizar coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^2$, mientras que la expresión módulo-argumental se corresponde a las coordenadas polares.*

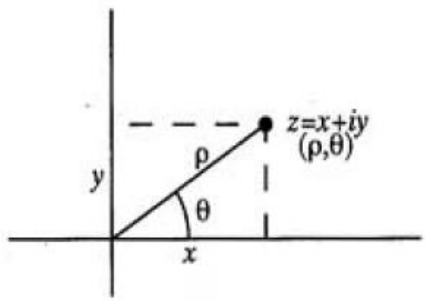

Fig. 1.2

Se verifican las relaciones del cambio de coordenadas

$$x = \rho \cos \theta$$
$$y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

2) *Para operar con números complejos se utilizará la forma de éstos en la cual los cálculos sean más sencillos, por ejemplo el producto y el cociente de números complejos en forma módulo-argumental admiten una expresión muy simple:*

$$\text{si} \quad z_1 = (\rho_1, \theta_1), \quad z_2 = (\rho_2, \theta_2) \quad \text{entonces} \quad \begin{array}{l} z_1 z_2 = (\rho_1\rho_2, \theta_1 + \theta_2) \\ \dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}, \theta_1 - \theta_2\right) \quad \text{si } z_2 \neq 0 \end{array}$$

Esto permite una sencilla interpretación geométrica para el producto de dos números complejos. El número complejo $z_1 z_2$ tiene por módulo el producto de los módulos de z_1 y z_2 y por argumento la suma de los argumentos.

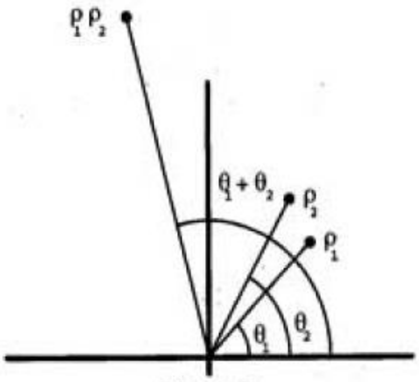

Fig. 1.3

En particular, multiplicar un número complejo z por otro de módulo 1 y argumento θ supone un giro de θ radianes.

5.10. Definición. Exponencial compleja

Dado $\varphi \in I\!R$ se define $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$.
Así, dado un número complejo $z = x + yi$ la exponencial de z es

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

5.11. Teorema.

Todo número complejo z puede expresarse de la forma

$$z = \rho e^{i\theta}$$

siendo $\rho = |z|$ y θ un argumento de z.
Así, $z = x + iy = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

5.12. Propiedades de la exponencial compleja

a) $e^0 = 1$.
b) $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
c) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
d) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
e) $e^z = 1 \iff z = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$.
f) $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 - z_2 = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$. (La función exponencial compleja no es inyectiva).

5.13. Potencia de un número complejo. Fórmula de De Moivre

Para calcular una potencia entera $z^n = z \overset{(n}{\cdots} z$ de un número complejo puede utilizarse la fórmula del binomio de Newton si z está expresado en forma binómica, pero si n es grande el proceso resulta laborioso. Si se tienen el módulo ρ y el argumento θ de z se puede obtener fácilmente z^n ya que

$$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$$

o lo que es lo mismo:

$$(*) \qquad z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

es decir z^n tiene módulo ρ^n y argumento $n\theta$.

La expresión $(*)$ se conoce como fórmula de De Moivre y, además de su utilidad en este contexto, se puede aplicar para obtener relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo y la de sus múltiplos enteros.

5.14. Raíces enteras de un número complejo

Dado el número complejo $z = \rho e^{i\theta} \neq 0$ existen n números w_k, $k = 0, 1, \ldots n-1$ que verifican $(w_k)^n = z$, es decir son las raíces n-ésimas de z. Además, estos números son

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, \ldots n-1$$

COMENTARIO: *Todas las raíces de un número complejo $z = (\rho, \theta)$ tienen el mismo módulo $\sqrt[n]{\rho}$ y sus argumentos se obtienen empezando en $\frac{\theta}{n}$ e incrementando sucesivamente $\frac{2\pi}{n}$ radianes.*

Esto se puede expresar

$$w_0 = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{n}}, \qquad w_k = e^{i\frac{2\pi}{n}}\, w_{k-1} \qquad k = 1, \ldots n-1$$

5.15. Definición. Logaritmo de un número complejo

Dado el número complejo $z = (\rho, \theta) \neq 0$, un logaritmo de z es un número complejo w tal que $e^w = z$. Se denotará $w = \log z$ y se verifica que $\log z = \log \rho + i(\theta + 2k\pi)$ es decir, $\log z$ es un número complejo cuya parte real es el logaritmo (neperiano, real) del módulo de z y cuya parte imaginaria es un argumento de z.

El logaritmo principal del número complejo z es $\log z = \log \rho + i\theta$ donde θ es el argumento principal de z.

5.16. Definición. Potencias de base y exponente complejos

Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Se define $z^w = e^{w \log z}$.

COMENTARIO: *El valor z^w no es único.*

PROBLEMAS RESUELTOS

13. *Calcular*

a) $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(3-4i)}$ *b)* i^{5787}

SOLUCIÓN:

a)

$$\begin{aligned}\frac{(3-2i)(2+3i)}{(3-4i)} &= \frac{(6+6+9i-4i)}{3-4i} = \frac{12+5i}{3-4i} \\ &= \frac{(12+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{(36-20)+i(48+15)}{9+16} \\ &= \frac{16+63i}{25}\end{aligned}$$

b) De acuerdo con el resultado 5.4, $i^{5787} = i^{4\cdot 1446+3} = i^3 = -i$.

14. *a) Expresar en forma módulo-argumental el número complejo $z = 1 + i$.*
b) Expresar en forma binómica los números complejos cuya forma módulo-argumental es $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ *y* $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

SOLUCIÓN:

a) $|z| = \rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
$\theta = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$ ó $\frac{\pi}{4} + \pi$.
La solución es $\theta = \frac{\pi}{4}$ ya que $1 + i$ se encuentra en el primer cuadrante.
Entonces, $z = 1 + i = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

b) $z = \left(2, \frac{\pi}{2}\right) = x + iy$, siendo $x = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $y = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 2$. Por tanto, $z = 2i$.
$z = \left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right) = x + iy$, siendo $x = \sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4} = -1$, $y = \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = 1$. Por tanto, $z = -1 + i$.

———————— • ————————

15. *Calcular*
a) $(1+4i)^3$ *b)* $(1+i)^4$

SOLUCIÓN:

a) Se utiliza la fórmula del binomio de Newton

$$(1+4i)^3 = \binom{3}{0}1^3 + \binom{3}{1}1^2(4i) + \binom{3}{2}(4i)^2 + \binom{3}{3}(4i)^3 = 1 + 12i - 48 - 64i = -47 - 52i.$$

b) Al ser $1 + i = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ se tiene

$$(1+i)^4 = \left(\left(\sqrt{2}\right)^4, 4\frac{\pi}{4}\right) = (4, \pi) = -4 + 0i.$$

NOTA: *Compruebe el lector este resultado aplicando el binomio de Newton.*

19. *Determinar los números complejos z tales que su cuadrado es igual a su conjugado.*

SOLUCIÓN:

Se debe resolver la ecuación $z^2 = \overline{z}$.
Si $z = \rho e^{i\theta}$ se tiene $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$; por tanto, $z^2 = \overline{z}$ equivale a $\rho^2 e^{2i\theta} = \rho e^{-i\theta}$ de donde se obtiene $\rho e^{3i\theta} = 1$.
Puesto que $\left|e^{3i\theta}\right| = 1$, se debe tener $\rho = 1$ y por tanto, $z = e^{i\theta}$.
Se resuelve $e^{3i\theta} = z^3 = 1$, es decir se calculan las raíces cúbicas de la unidad.
Como $1 = (1, 0)$ se tienen las soluciones siguientes

$$z_1 = (1,0) = 1$$
$$z_2 = \left(1, \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_3 = \left(1, \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3} == -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

20. *Hallar los números complejos z tales que $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$.*

SOLUCIÓN:

Sea $z^3 = t$. La ecuación se convierte en

$$t^2 - 9t + 8 = 0$$

que tiene como soluciones $t = 1$ y $t = 8$.

Se resuelven ahora $z^3 = 1$ y $z^3 = 8$. Se trata pues de hallar las raíces cúbicas de 1 y de 8; para ello, expresaremos estos números en forma módulo-argumental.

Puesto que la forma módulo-argumental de 1 es $(1,0)$ sus raíces cúbicas son

$$z_1 = (1,0) \qquad z_2 = \left(1, \frac{2\pi}{3}\right) \qquad z_3 = \left(1, \frac{4\pi}{3}\right)$$

Por ser $8 = (2^3, 0)$ se tiene que las raíces cúbicas de 8 son

$$z_1 = (2,0) \qquad z_2 = \left(2, \frac{2\pi}{3}\right) \qquad z_3 = \left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$$

22. *Se considera un circuito de corriente alterna, de frecuencia ω, formado por una resistencia, una bobina y un condensador. Se define la impedancia de dicho circuito como el número complejo*

$$z = R + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) i$$

donde R es la resistencia medida en ohmios, L es la inducción de la bobina medida en henrios y C es la capacidad del condensador medida en faradios.

Si la fuerza electromotriz es $E = E_0 \,\mathrm{sen}\,\omega t$, la intensidad del circuito es $I = \dfrac{E}{z}$. Se pide:

a) Hallar el ángulo que forman los vectores I y E, llamado ángulo de desfase.

b) Para un valor fijo de R, hallar la relación que debe existir entre L y C para que el circuito sea "resonante" (la intensidad sea máxima).

SOLUCIÓN:

a) Podemos poner el número complejo z en la forma $z = |z|\, e^{i\varphi}$, donde φ es el argumento de z y $|z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$.

Como $I = \dfrac{E}{z}$, I y E están desfasados el ángulo φ, ya que $I = \dfrac{E}{|z|}\, e^{-i\varphi}$.

b) Para que la intensidad sea máxima, debe ser $|z|$ mínimo. Puesto que R está fija, esto se consigue con $L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$, es decir $LC = \dfrac{1}{\omega^2}$.

En esta situación el ángulo de desfase es $\varphi = 0$ e $I = \dfrac{E}{R}$.

NOTA: *En un circuito resonante, la bobina y el condensador se "compensan".*

25. *a) Calcular* $\operatorname{sen} 3\varphi$, $\cos 3\varphi$ *en función de las razones trigonométricas de* φ, *donde* $\varphi \in \mathbb{R}$.
b) Obtener $\cos^3 \varphi$ *en una fórmula que no contenga potencias de razones trigonométricas.*

SOLUCIÓN:

a) Elevando al cubo $e^{i\varphi}$

$$\left(e^{i\varphi}\right)^3 = (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^3$$

se obtiene, por la fórmula de De Moivre,

$$e^{3i\varphi} = \cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi = (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^3$$

Utilizando el desarrollo del binomio de Newton se tiene

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi - i \operatorname{sen}^3\varphi.$$

Igualando las partes reales e imaginarias

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi$$
$$\operatorname{sen} 3\varphi = 3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi$$

b) De la igualdad obtenida en el apartado anterior

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi;$$

teniendo en cuenta $\operatorname{sen}^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$, se obtiene

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\left(1 - cos^2\varphi\right).$$

Por tanto, despejando $\cos^3\varphi$

$$\cos^3\varphi = \frac{\cos 3\varphi + 3\cos\varphi}{4}.$$

26. *Calcular*

a) $\log(3+3i)$ *b)* $i^{\log i}$

SOLUCIÓN:

a) El número complejo $3+3i$ en forma módulo-argumental es $\left(3\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$; por tanto,

$$\log(3+3i) = \log 3\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

b) La expresión se puede escribir como $i^{\log i} = e^{\log i \cdot \log i} = e^{(\log i)^2}$

Pero al ser $i = \left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\log i = \log 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

Por tanto,

$$i^{\log i} = e^{\left[i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]^2} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2}.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

12. *Calcular*

a) $\dfrac{z_1 z_2 z_3 z_4}{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}$ *siendo* $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 1$ *y* $z_4 = 1 - i$.

b) $1 + i + i^2 + \cdots + i^{43}$.

13. *Calcular*

a) $(1-2i)^3$ *b)* $(2-2i)^5$

14. *a) Expresar en forma módulo-argumental los complejos* $z_1 = 3 + 3i$ *y* $z_2 = 4i$.

b) Expresar en forma binómica el complejo $z = \left(\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$

17. *Dado* $a \in \mathbb{C}$ *se considera el número complejo* $z = \dfrac{3 - 2ai}{4 - 3i}$.

Determinar a *para que* z *verifique, en cada caso, que*

a) Sea un número imaginario puro.

b) Sea un número real.

c) Esté sobre la bisectriz del primer cuadrante.

20. *Hallar los números complejos* z *tales que* $z^{10} - 2z^5 + 1 = 0$.

23. *Obtener* $\operatorname{sen} 5\varphi$ *y* $\cos 5\varphi$ *en función de las razones trigonométricas de* $\varphi \in \mathbb{R}$.

BIBLIOGRAFÍA

García, A.; García, F.; López, A.; Rodríguez, G.; De La Villa, A.; ''*Cálculo I. Teoría y problemas de análisis matemático en una variable''*. Clagsa 2007.